



Research on Reflection and Rotation Features of Binomial Coefficient Distributions

Zhu Minghan¹, Zheng Jeffrey Zhijie^{2,*}

¹School of Software, Yunnan University, Kunming, China

²Yunnan Laboratory of Quantum Information, Kunming, China

Email address:

crystalj000@163.com (Zhu Minghan), conjugatelogic@yahoo.com (Zheng Jeffrey Zhijie)

*Corresponding author

To cite this article:

Zhu Minghan, Zheng Jeffrey Zhijie. Research on Reflection and Rotation Features of Binomial Coefficient Distributions. *Science Discovery*. Vol. 7, No. 4, 2019, pp. 239-248. doi: 10.11648/j.sd.20190704.21

Received: July 8, 2019; **Accepted:** August 22, 2019; **Published:** August 27, 2019

Abstract: With the rapid development of frontier neural network, artificial intelligence and big data technology, the related theory and application research of combinatorial mathematics are more and more extensive. The application of binomial coefficient in combinatorial mathematics is an effective way to solve the research of information coding and quantum computation. Binomial coefficients and its distributions are the core topic in probability statistics, and there are many theories and applications related to them. In this paper, the quantification of binomial coefficients and the characteristic of reflection rotation transformation are studied using three-dimensional diagrams. Using variant construction, the combinatorial clustering properties are investigated applying binomial formulas and sample distributions and their combinatorial patterns are illustrated. It is proved that the basic binomial coefficient formula and its extended model have obvious properties of reflection and rotation invariance.

Keywords: Binomial Coefficient, Spatial Extension, Variant Construction, Reflection, Rotation

二项式系数量化分布的反射旋转特性研究

朱明涵¹, 郑智捷^{2,*}

¹云南大学软件学院, 昆明, 中国

²云南省量子信息重点实验室, 昆明, 中国

邮箱

crystalj000@163.com (朱明涵), conjugatelogic@yahoo.com (郑智捷)

摘要: 随着前沿神经网络, 人工智能, 大数据技术的快速发展, 组合数学的相关理论和应用研究越来越广泛。二项式系数在组合数学中的应用是解决信息编码及量子计算研究的有效途径。二项式系数及其分布是概率统计中的核心论题, 已有丰富的理论及其应用与其关联。本文利用一类基础二项式系数公式, 通过变换参数的模式, 形成与反射和旋转关联的作用。通过三维散点图示对其二项式系数的量化情况及反射旋转变换特性进行研究, 展现了利用变值测量所形成的二项式公式的潜在扩展能力。从整体不变性的角度, 系统地研究与这类二项式公式及其扩展模式伴随的各种组合聚类性质。证明该类基础二项式系数公式及其扩展模式具有明显的反射和旋转不变特性。

关键词: 二项式系数, 扩展模式, 变值测量, 反射性, 旋转不变性

1. 引言

在数学与计算机科学领域,随着前沿神经网络,人工智能,大数据技术的快速发展,组合数学的相关理论和应用研究变得越来越重要[1]。对二项式系数公式的量化特征研究得到了越来越多的数学家,大数据人工智能专家的关注[2]。

二项式系数与帕斯卡三角形存在着——对应的联系。从不变性的角度,古今中外的数学家们对此产生浓厚的兴趣。除了推导公式,恒等式证明,寻找特殊数字排列规律等研究之外,利用二项式系数公式进行可视化分析对前沿大数据,云计算等学科尤为重要。

利用计算机图形学和图像处理技术的可视化技术,是一类将数据转换成图形或图像在屏幕上显示出来,再进行交互处理的理论、方法和技术[3]。涉及到计算机图形学、图像处理、计算机视觉、虚拟现实技术、计算机辅助设计等多个领域,成为研究数据表示、数据处理、决策分析等一系列解决与大数据,人工智能相关核心问题的综合技术。

对于可视化技术[4]的一个重要分支:科学计算可视化,把科学数据,包括测量获得的数值、图像或是复杂系统涉及到的数字信息变为直观的图像信息表示。使伴随时间和空间变化的物理现象或物理量直观地呈现在研究者面前,以便于观察、模拟和计算[5]。

利用组合方法给出特定数学,组合恒等式的证明是组合数学研究的热点[6]。在物理学,数学,计算机科学领域中,二项式系数起到重要作用,表现出的旋转反射不变性为其核心特性。[7]本文扩展形成的二项式公式族,所形成的分布具有明显的反射旋转不变性。期待该类不变特性能够与量子力学、经典物理学、数学、计算机科学、卷积神经网络中的不变特性密切结合,对各类应用计算方法中的优化研究有帮助。

本文利用变值测量模型和方法,结合三维可视化分析二项式系数公式量化分布特点,对其不同参数族形成的反射旋转和特定特征进行分析总结。从全体不变的角度,系统地考察二项式系数及其扩展表示的各种组合聚类性质。

2. 理论基础

2.1. 二项式系数与组合数

二项式系数[8](binomial coefficient):或组合数,定义为形如展开后x的系数(其中n为自然数,k为整数)。

组合数[9](combinatorial number):从n个不同元素中取出m(m≤n)个元素所有组合的个数,即从n个不同元素中取出m个元素的组合数。用符号 $\binom{n}{m}$ 表示。

2.2. 变值编码体系

2010年创建的变值体系[10]包括三个部分:变值逻辑,变值测量和变值可视化。变值逻辑是基于0-1向量模式的新型逻辑体系。

该体系在传统向量状态的基础上扩展两类向量运算:置换和互补,将传统的n元逻辑函数空间从 2^n 函数空间扩展成为 $2^n! \cdot 2^{2^n}$ 配置函数空间[11]。变值测量和变值图示已应用于不同的问题,包括:经典密码序列分析,量子密码序列检测,染色体全基因序列图示,心电图信号检测,蝙蝠信号处理等[10]。

本文主要部分扩展在变值测量中形成的基础二项式公式。

2.3. 反射旋转不变性

反射变换[12](reflection transformation)是平面几何中一种重要变换,将平面上的轴反射变换,镜面反射变换都称为反射变换。

作为仿射变换[13],可以描述图像或者图形之间的多种变换模式,其中包含平移,旋转,反射等。

旋转不变性[14]:平面几何中,当中点坐标确定之后,旋转算符转动360度与原图重合。在离散几何应用中,90度旋转最为常见[15]。本文旋转运算限于90度旋转,不涉及到其他任意角度的旋转运算。

3. 处理流程

3.1. 二项式系数公式由来

在变值体系专著[10]P39-50中,四个测度的有序结构{a,b,c,d},在置换和组合两种运算下共有192种表示结构。任意的一个结构都对应一组二项式系数。

在本文中,选择基础二项式公式为:

$$f(m, p, k) = \binom{m-p}{k} \binom{p}{k}, \text{取值范围为 } 0 \leq p \leq m; 0 \leq k \leq p;$$

$k \leq m-p$ 。

当m=10时,系数项分布在11*11的1/4区域中,其余3/4区域为0。组成如图1所示的等腰三角形。

$f(10, p, k)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	p
10												
9												
8												
7												
6												
5						1						
4					15	25	15					
3				35	80	100	80	35				
2			28	63	90	100	90	63	28			
1		9	16	21	24	25	24	21	16	9		
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
k												

图1 m取10基础二项式系数项三角形分布。

根据该二项式系数公式,利用其反射旋转不变的特性,变换不同的取值范围,可得出不同的二项式系数公式。且每组二项式系数公式,取值范围各不相同。处理过程如图2所示。

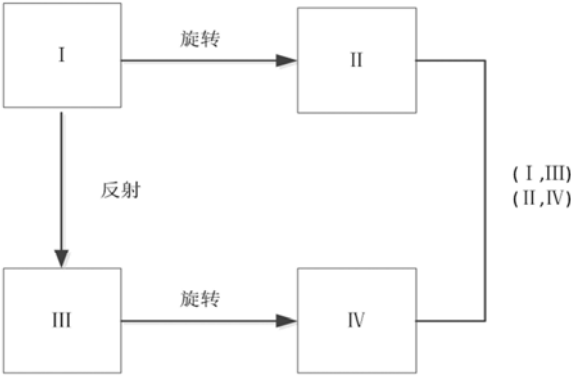


图2 二项式系数公式处理流程。

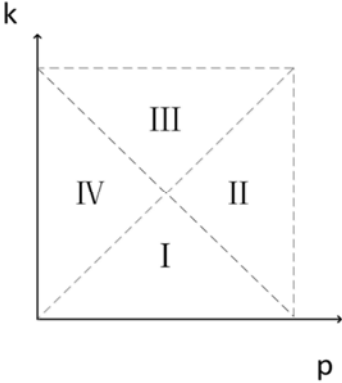


图3 二项式及扩展公式反射旋转变换过程。

首先从基本二项式系数公式 $f(m, p, k) = \binom{m-p}{k} \binom{p}{k}$ ，取值范围为 $0 \leq p \leq m; 0 \leq k \leq p; k \leq m-p$ ，三维作图得到区域 I，经过反射相应位置二项式系数值 f ，得到图3中区域 III 范围，推断出区域 III 对应的二项式系数公式为 $f_3(m, p, k) = \binom{m-k}{p} \binom{k}{p}$ ，相应的取值范围为 $0 \leq k \leq m; 0 \leq p \leq k; k \leq m-p$ 。

由于 I 和 III 区域与 II 和 IV 区域存在着旋转不变性的特性，因此由 I 和 III 区域旋转得到 II 和 IV 区域，则以区域 I 和区域 III 的二项式系数公式可以得出区域 II 和 IV 的范围及表达式： $f_2(m, p, k) = \binom{p}{m-k} \binom{m-p}{m-k}$ ， $0 \leq p \leq m; 0 \leq k \leq p; k > m-p$ 。 $f_4(m, p, k) = \binom{k}{m-p} \binom{m-k}{m-p}$ ， $0 \leq p \leq m; 0 \leq k \leq p; k > m-p$ 。

四个区域的二项式系数以 $m-p=k$ 和 $p=k$ 的射线，呈现对称结构。

如图3所示，系统描述了每个公式取值范围的变化情况，以及得出每个二项式公式的过程。

I : $f(m, p, k) = \binom{m-p}{k} \binom{p}{k}$, $0 \leq p \leq m; 0 \leq k \leq p; k \leq m-p$;
III: $f_3(m, p, k) = \binom{m-k}{p} \binom{k}{p}$, $0 \leq k \leq m; 0 \leq p \leq k; k \leq m-p$;
II : $f_2(m, p, k) = \binom{k}{m-p} \binom{m-k}{m-p}$, $0 \leq p \leq m; 0 \leq k \leq p; k > m-p$;
IV: $f_4(m, p, k) = \binom{p}{m-k} \binom{m-p}{m-k}$, $0 \leq k \leq m; 0 \leq p \leq k; k > m-p$ 。

3.2. 二项式系数公式矩阵图示

用矩阵结构表示基础二项式系数公式 $f(m, p, k) = \binom{m-p}{k} \binom{p}{k}$ 。对比 m 取值为奇数和偶数的二项式系数分布情况。 m 取值为9和10的系数项分布情况如图4(a)-(b)所示。

$f(9, p, k)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	p
9											
8											
7											
6											
5											
4					5	5					
3				20	40	40	20				
2			21	45	60	60	45	21			
1		8	14	18	20	20	18	14	8		
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
k											

(a)

$f(10, p, k)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	p
10												
9												
8												
7												
6												
5						1						
4					15	25	15					
3				35	80	100	80	35				
2			28	63	90	100	90	63	28			
1		9	16	21	24	25	24	21	16	9		
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
k												

(b)

图4 基础二项式系数公式矩阵图示 (a) $m=9$ (b) $m=10$ 。

在经过反射变换后形成的二项式公式

$$f_2(m, p, k) = \binom{k}{m-p} \binom{m-k}{m-p}, \quad 0 \leq m; \quad 0 \leq k; \quad k > m-p。$$
 以m=9

和m=10为例，对比m奇偶取值中系数分布情况。如图5(a)-(b)所示。

$f(9,p,k)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	p
9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
8		8	14	18	20	20	18	14	8		
7			21	45	60	60	45	21			
6				20	40	40	20				
5					5	5					
4					5	5					
3				20	40	40	20				
2			21	45	60	60	45	21			
1		8	14	18	20	20	18	14	8		
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
k											

(a)

$f(10,p,k)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	p
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
9		9	16	21	24	25	24	21	16	9		
8			28	63	90	100	90	63	28			
7				35	80	100	80	35				
6					15	25	15					
5						1						
4					15	25	15					
3				35	80	100	80	35				
2			28	63	90	100	90	63	28			
1		9	16	21	24	25	24	21	16	9		
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
k												

(b)

图5 基础二项式系数公式反射变换后矩阵图示 (a)m=9 (b)m=10。

最后通过其旋转不变的特性，对f函数和f3函数做旋转变换，得到如图6(a)-(b)所显示的扩展二项式系数分布情况。

$f(9,p,k)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	p
9	1									1	
8	1	8							8	1	
7	1	14	21					21	14	1	
6	1	18	45	20			20	45	18	1	
5	1	20	60	40	5	5	40	60	20	1	
4	1	20	60	40	5	5	40	60	20	1	
3	1	18	45	20			20	45	18	1	
2	1	14	21					21	14	1	
1	1	8							8	1	
0	1									1	
k											

(a)

$f(10,p,k)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	p
10	1										1	
9	1	9								9	1	
8	1	16	28						28	16	1	
7	1	21	63	35				35	63	21	1	
6	1	24	90	80	15		15	80	90	24	1	
5	1	25	100	100	25	1	25	100	100	25	1	
4	1	24	90	80	15		15	80	90	24	1	
3	1	21	63	35				35	63	21	1	
2	1	16	28						28	16	1	
1	1	9								9	1	
0	1										1	
k												

(b)

图6 二项式系数公式旋转变换后矩阵图示 (a)m=9 (b)m=10。

基础二项式系数公式及其扩展模式的系数分布情况用如图7(a)-(b)所示的矩阵结构表示。

通过观察图7(a)，当m=9时，经过反射旋转后，数值与数值之间呈现对称结构，不存在中心点，以中间为5得数值形成的两行两列的对称结构。以黄色区域突出显示。

如图7(b)，当m=10时，经过反射旋转后呈现中心对称，组成11*11的正方形。最外圈都为1，存在中心点，且中心点也为1。以中间点为1的数值形成一行一列的对称结构。以黄色区域突出显示。

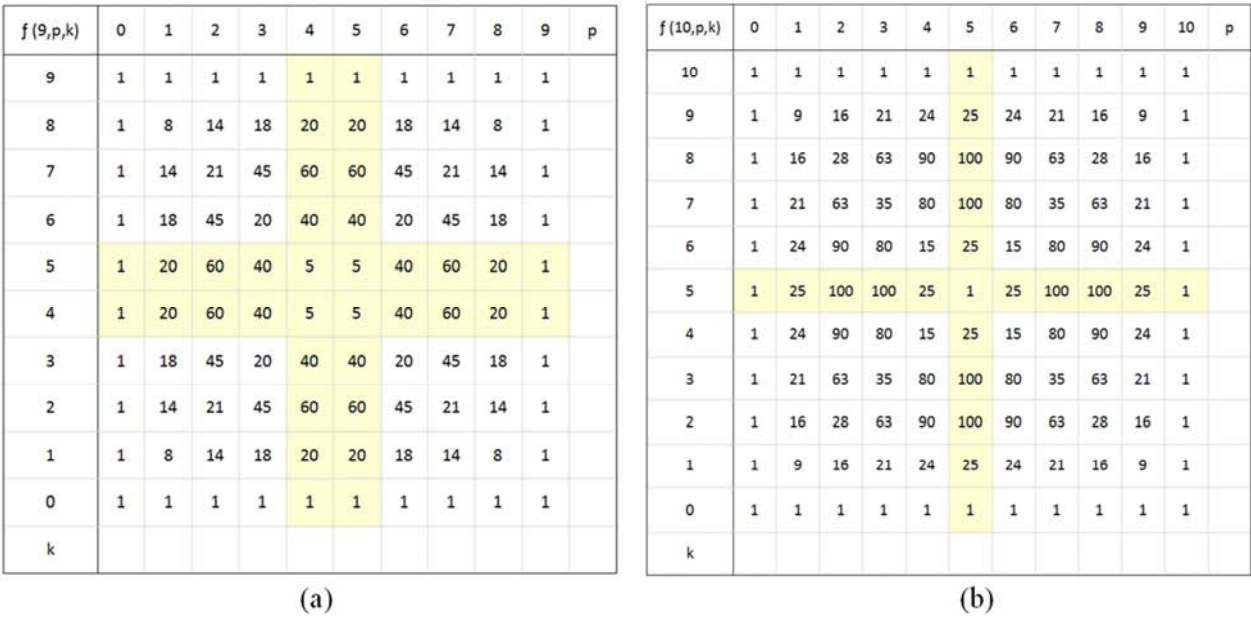
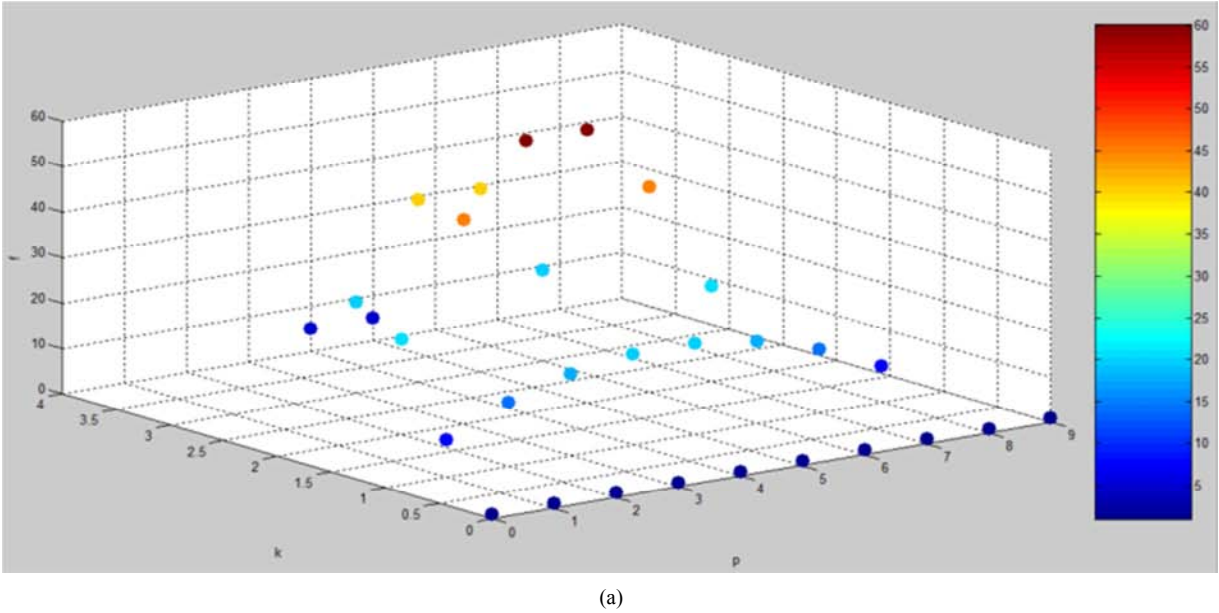


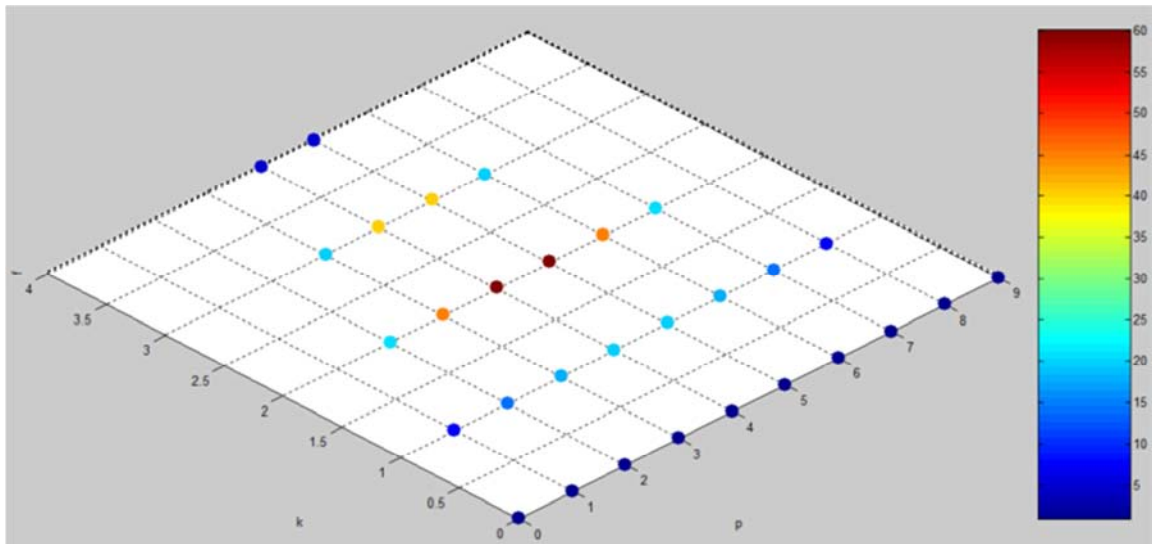
图7 基础二项式系数公式及其扩展模式矩阵图示 (a)m=9 (b)m=10。

4. 结果显示

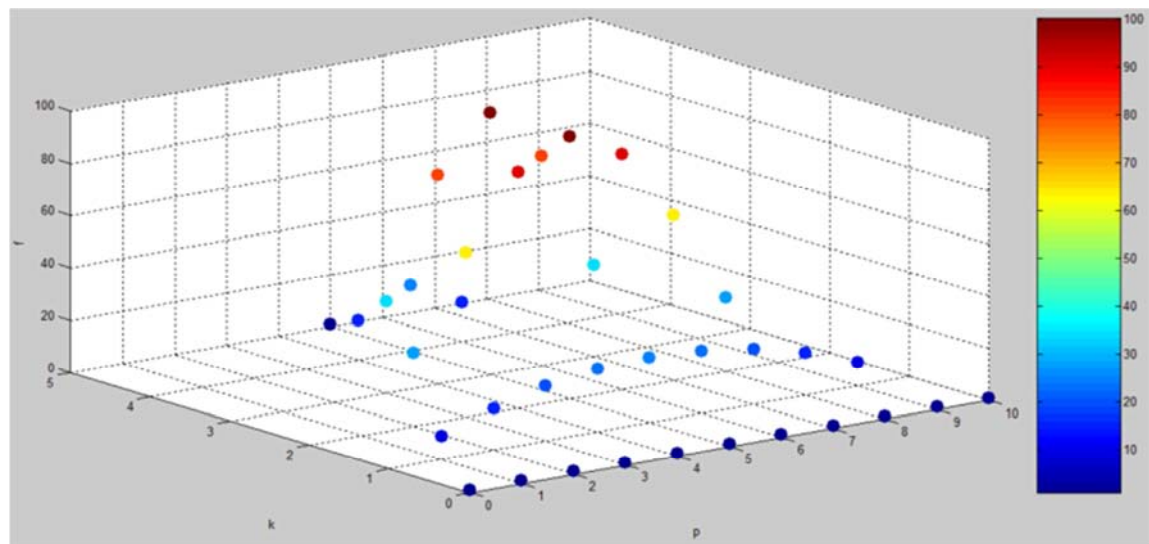
在三维立体散点表示下：
利用测量图解，可视化分析并讨论组合系数中不同数值的分布情况，变量映射由二项式系数数组作为样本。
二项式系数公式： $f(m,p,k)=\binom{m-p}{k}\binom{p}{k}$ ，取值范围为： $0pm; 0kp; km-p$ 。
当m取值为9时，通过观察图8(a)-(b)，在10*10的区域

到红色依次增强。俯视图8(a)能明显观察到最高层有两个点，切数值相等，不存在最高点。俯视图8(d)则展现出最高点的分布情况。
当m=9和m=10时，基础二项式公式三维可视化结果如下图8(a)-(d)所示。
当m取值为奇数时，俯视图三角顶部不存在顶点，最高为两个数值点。当m取值为偶数时，俯视图三角形存在最高顶点。

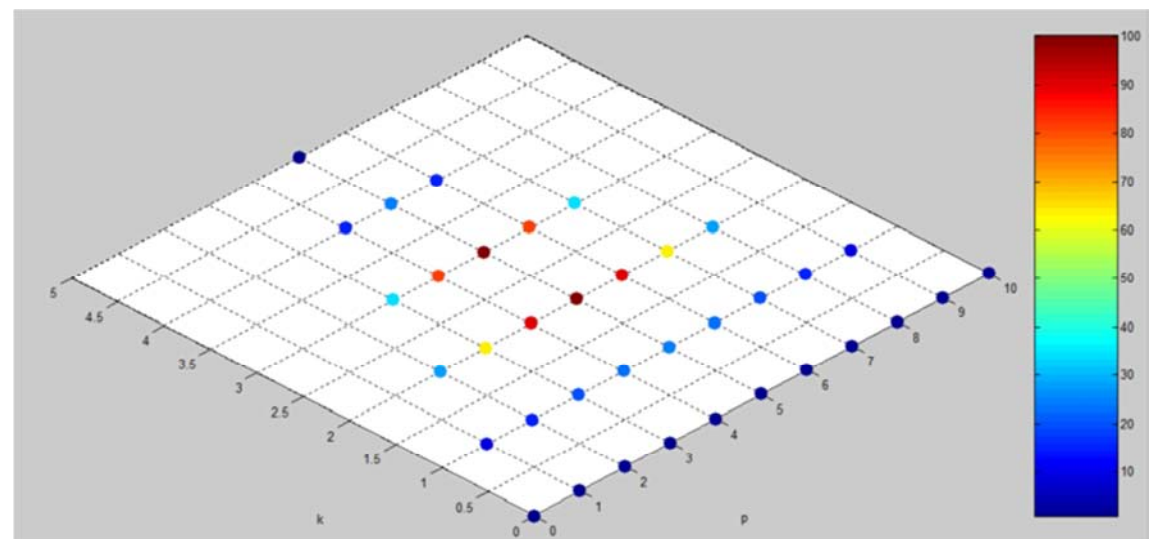




(b)



(c)



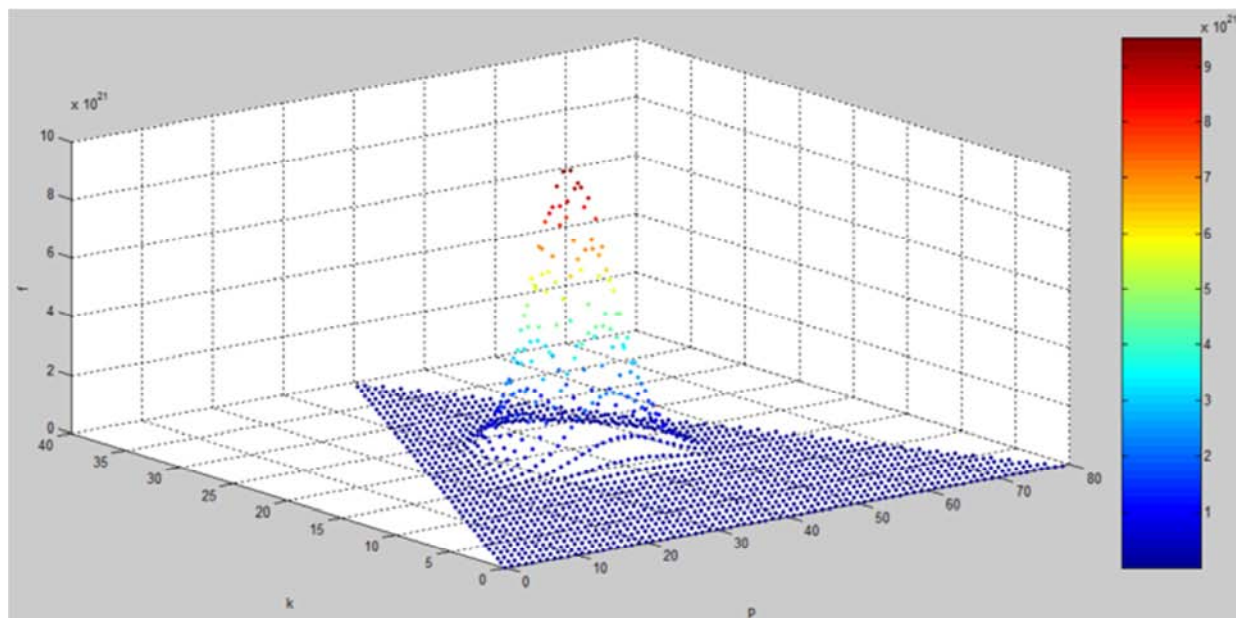
(d)

图8 二项式系数公式三维可视化图示 (a)m=9正视图 (b)m=9俯视图 (c)m=10正视图 (d)m=10俯视图。

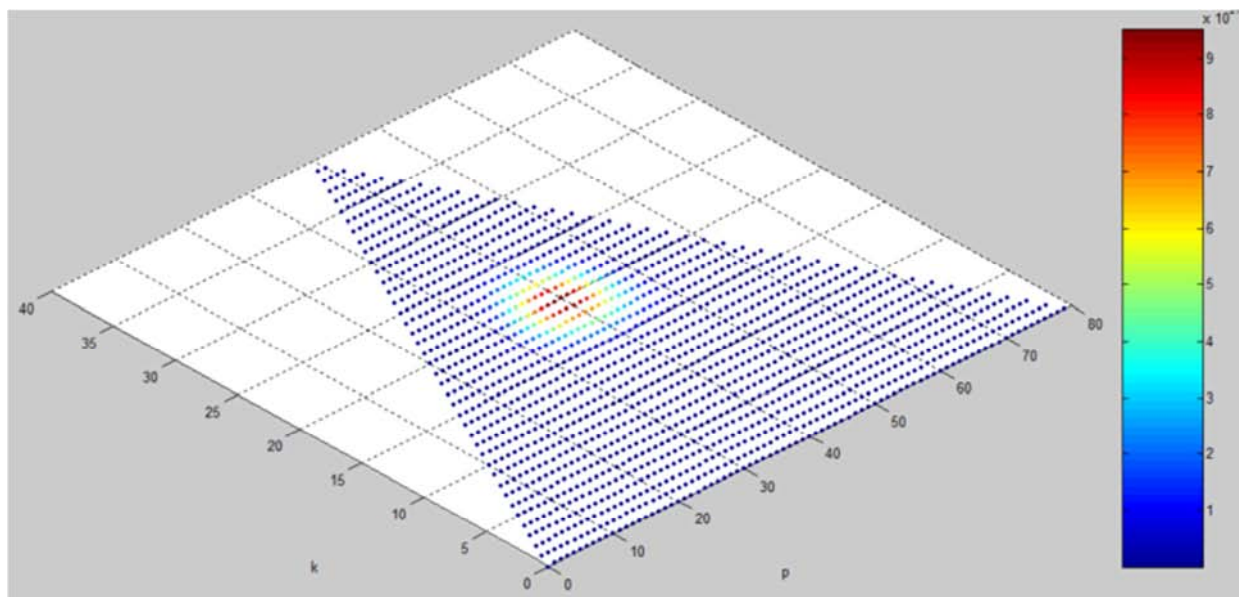
当 m 取79和80时, 通过观察图10(a)和图10(c), 发现该二项式公式呈现一个峰波。以值为颜色区别, 从深蓝色到深红色依次增强。底面数值全为1, 数值分布以平面为单位, 颜色依次变强, 数值也相应增加, 且每一层的数值都呈现出先减小后增大的趋势, 符合对称性原理及正态分布原则。蓝色数值集中在波峰的下半部分, 红色集中在峰顶。

俯视图图10(b)和图10(d)呈现三角形, 中心取值最大, 依次向四周扩散, 取值逐渐减小, 符合帕斯卡三角形法则。当 $m=79$ 时, 俯视图最高层为两个点, 且两点数值相等。而 $m=80$ 时, 只存在一个最高点。

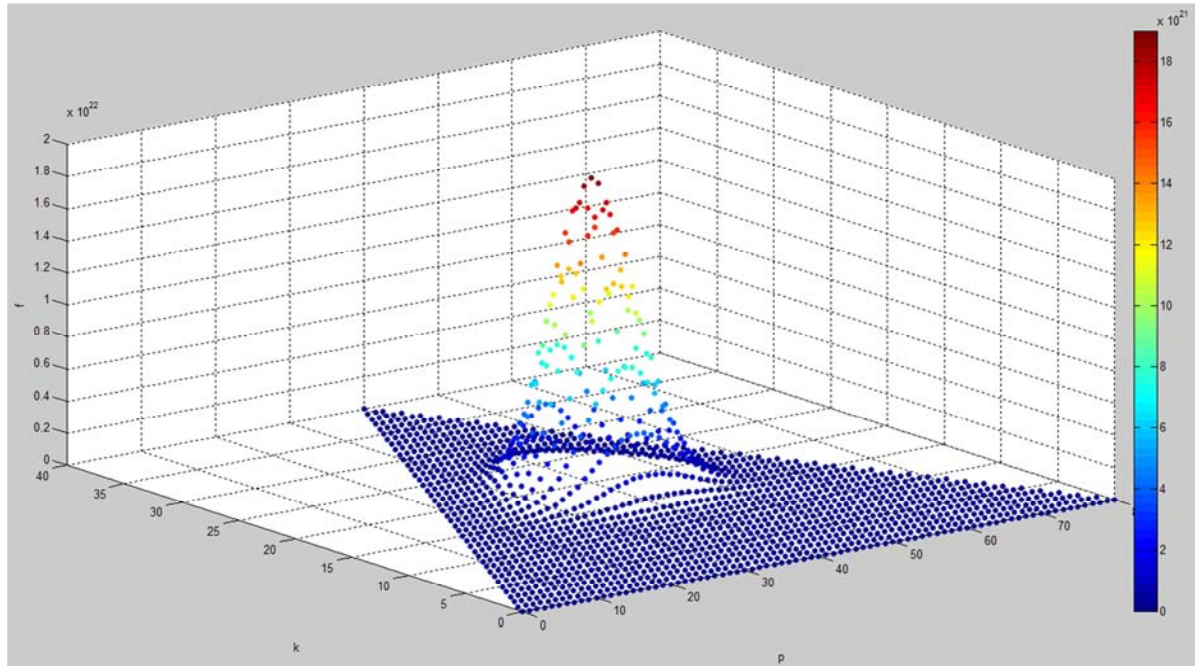
当 $m=79$ 和 $m=80$ 时, 基础二项式公式三维可视化结果如下图10(a)-(d)所示。



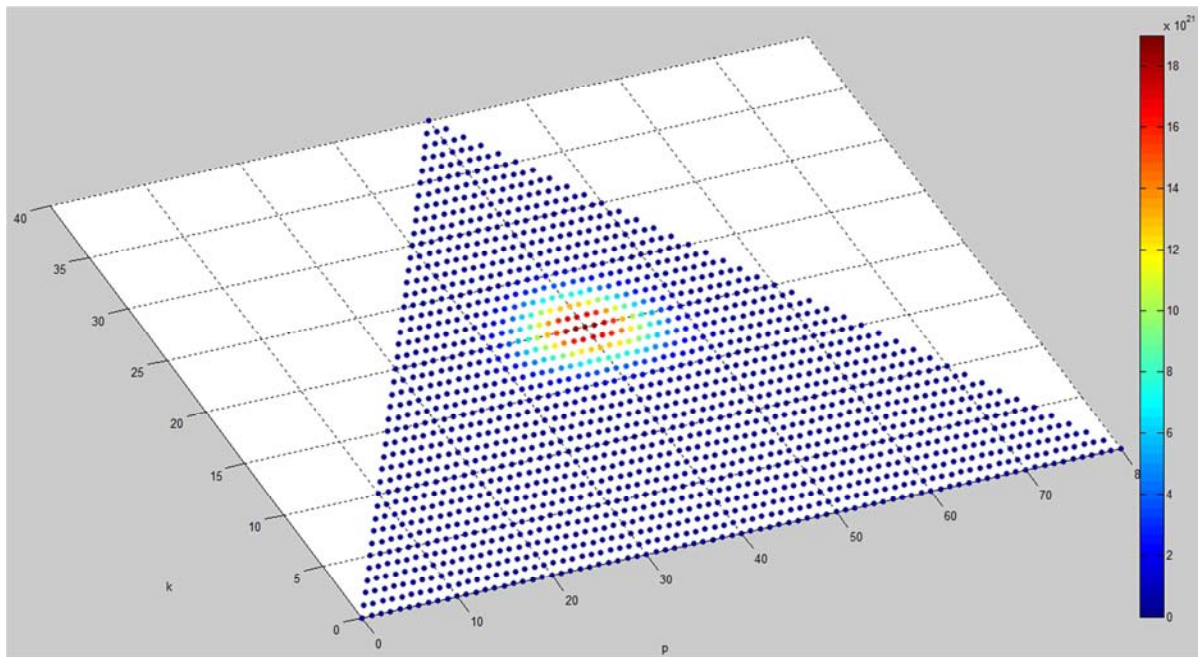
(a)



(b)



(c)



(d)

图9 二项式系数公式三维可视化图示 (a)m=79正视图 (b)m=79俯视图 (c)m=80正视图 (d)m=80俯视图。

由二项式系数公式: $f(m, p, k) = \binom{m-p}{k} \binom{p}{k}$, 推导出

其他公式及取值范围:

取 $0 \leq p \leq m$; $0 \leq k \leq p$; $k \leq m-p$, 得出公式为 $f(m, p, k) = \binom{m-p}{k} \binom{p}{k}$, 取 $0 \leq p \leq m$; $0 \leq k \leq p$; $k > m-p$, 得出公式

为 $f_2(m, p, k) = \binom{k}{m-p} \binom{m-k}{m-p}$;

取 $0 \leq k \leq m$; $0 \leq p \leq k$; $k \leq m-p$, 得出公式为

$f_3(m, p, k) = \binom{m-k}{p} \binom{k}{p}$, 取 $0 \leq k \leq m$; $0 \leq p \leq k$; $k > m-p$, 得出公

式为 $f_4(m, p, k) = \binom{p}{m-k} \binom{m-p}{m-k}$ 。

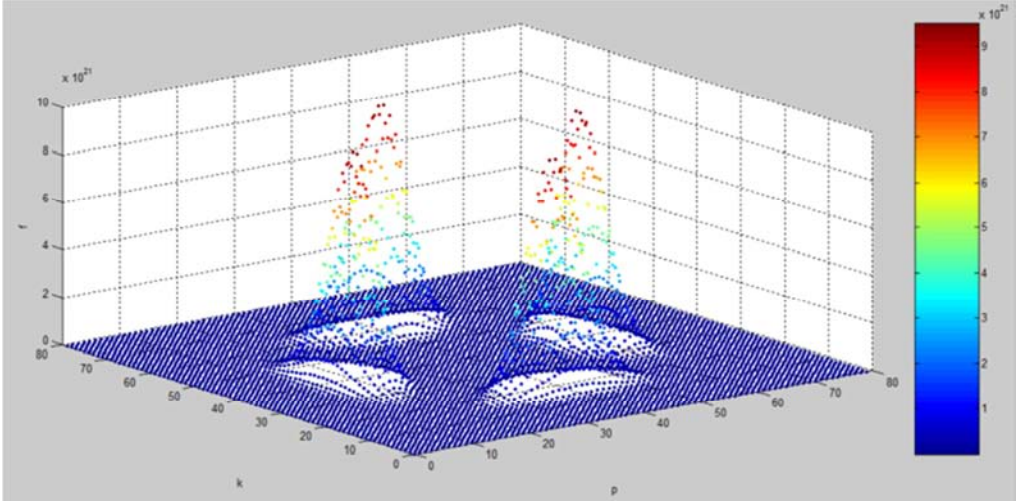
取 $m=79$ 以及 $m=80$, 根据所得公式作三维散点图示。参阅图10(a)-(d)。

10(a)图取 $m=79$, 图10(c)取 $m=80$, 都展示了不同数值量化的分布情况。从图9(a)和图9(c)的单个峰波, 经过旋转

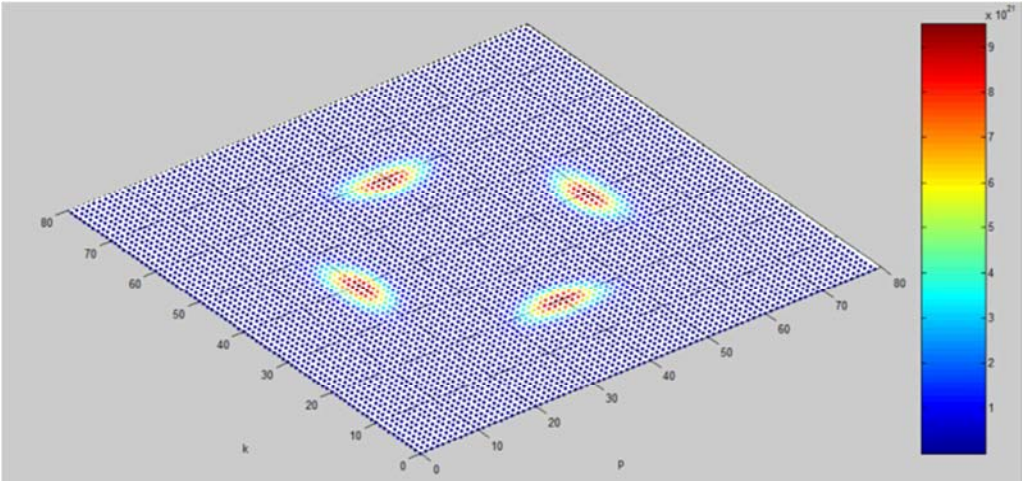
反射，变为四个结构类似的峰波，并保留原有特征性质。中心取值最大，依次向四周扩散，取值逐渐减小，四个峰波仍都符合帕斯卡三角形法则。

通过观察图10(b)和图10(d)，取 $m=80$ 俯视图呈现矩形，以中心对称，并更明显的看出经过变换后的公式完全符合

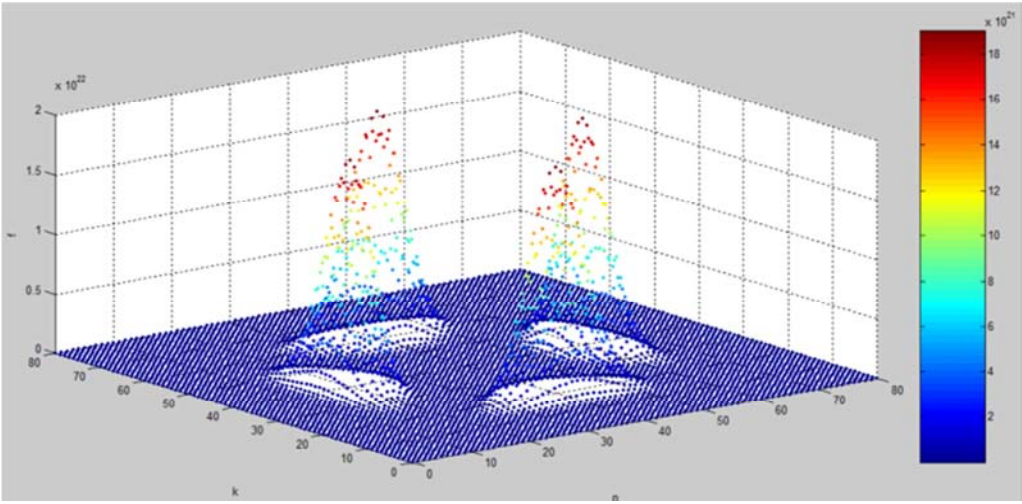
反射旋转不变性的特征。两幅俯视图差异很小，特征并不明显。 m 取值小的数值更易观察二项式公式及扩展模式的数值分布情况。



(a)



(b)



(c)

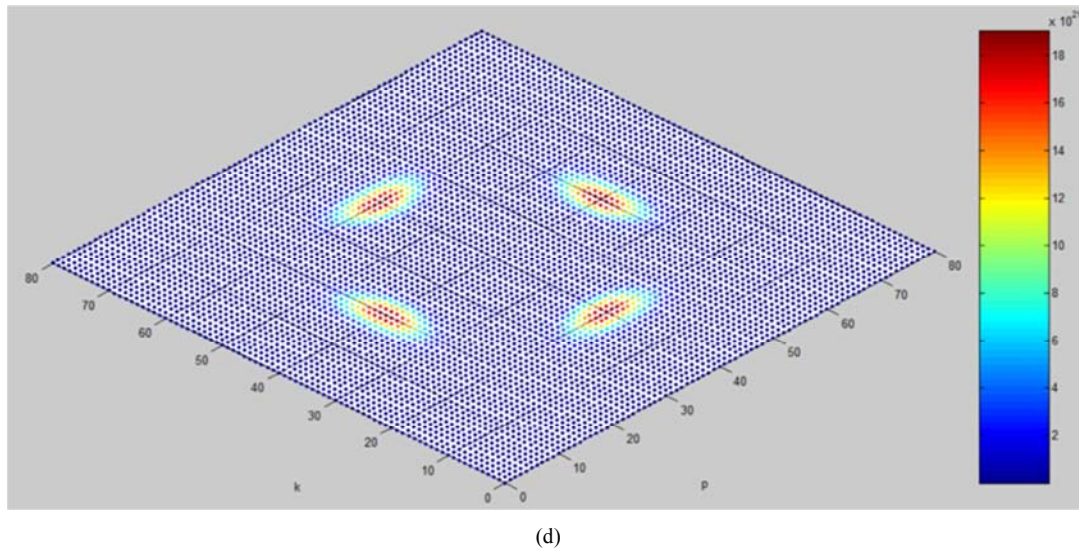


图10 基础二项式公式及扩展模式三维散点图示 (a)m=79正视图 (b)m=79俯视图 (c)m=80正视图 (d)m=80俯视图。

5. 结论

利用基础二项式系数公式探索其扩展模式的系数分布特性, 展现反射及旋转变换图示, 是一类新型的探索模式。依据这些二项式系数公式, 可以更为方便地进行各种组合分析和统计分布可视化。

所选择的基础二项式系数公式及其扩展性模式, 在奇数和偶数的参数变换条件下, 形成可区分的反射及旋转特性。根据2维直方图量化矩阵, 将对应的二项式系数公式作三维可视化是有意义的。给出的系列变换实例展现了变值测量形成新型二项式公式的潜在扩展能力, 为今后大数据分析和复杂组合测量模式拟合等基础和应用型研究奠定理论基础。

致谢

本项目由云南省量子保密通讯技术重大专项(2018ZII002)和云南省海外高层次人才项目联合资助。

参考文献

- [1] Brualdi, R.A. 组合数学 (原书第4版) [M]. 机械工业出版社: 2005.
- [2] 庞兴梅. 组合变换在等式、多项式及简单图中的应用[D]. 天津: 南开大学, 2009.
- [3] EvaPart-Enander. MATLAB 5手册[M]. 机械工业出版社: 2000.
- [4] Cleve Moler. Experiments with MATLAB[M]. 北京航空航天大学出版社: 2013.
- [5] 尹社会. 利用伯努利系数表计算刚体转动惯量[R]. 高师理科学刊, 2012, 32(3).
- [6] Knuth, D.E. 计算机编程的艺术 (第4卷: 组合算法, 第1部分) [M]. 国防工业出版社, 2011.
- [7] Morgan, F. 几何测度论[M]. 世界图书出版公司, 2009.
- [8] 吴军. 数学之美[M]. 人民邮电出版社, 2012.
- [9] Knuth, D.E. 计算机编程的艺术 (第1卷, 第3版) [M]. 国防工业出版社, 2002.
- [10] ZHENG Jeffrey Z. J. Variant Construction From Theoretical Foundations To Applications [M]. China: Springer, 2019: 39-50, 237-245. <https://link.springer.com/book/10.1007/978-981-13-2282-2>
- [11] ZHENG Jeffrey Z. J. A framework to express variant and invariant functional spaces for binary logic [J]. Front. Electr. Electron. Eng. China 5 (2), 163-172 (2010). Higher Educational Press and Springer.
- [12] 赵熙强. Vandermonde卷积公式统一形式及其相应超几何变换[J] 大连理工大学学报, 2000, 40(6).
- [13] 逯志宇. 基于对称旋转不变性的非圆相干分布源直接定位算法[J] 电子与信息学报, 2019, 41(3).
- [14] 王庆平. 计量逻辑学中的反射变换[J] 模糊系统与数学, 2018, 32(6).
- [15] Kumar V. B. Efficient Computation of Binomial Coefficients Using Splay Trees [J]. International Journal on Data Science and Technology, 2016, 2 (1).