



The Algebraical Superposition Technic for Transformation From S Domain to Time Domain

Ben Qing GAO

Beijing Institute of Technoly, School of Information Science and Technology, Beijing, China

Email address:

gaobq@bit.edu.cn

To cite this article:

Ben Qing GAO. The Algebraical Superposition Technic for Transformation from S Domain to Time Domain. *Asia-Pacific Journal of Physics*. Vol. 2, No. 3, 2020, pp. 13-18.

Received: June 9, 2020; **Accepted:** July 3, 2020; **Published:** July 28, 2020

Abstract: An lgebraical superposition technic for trasformation from frequency domain to time domain is presented. The establishing model process are; From the inverse Laplace transform integral formula, the integral formula can be express by the series with k $[-K, K]$ term, based on integral function distribution properties along integral path, the bidirectional series sum on k $[-K, K]$ term series can be expressed by a monomial trigonomial function series sum on k $[0, K]$. In the paper the solution process and main points are presented. The application examples are shown, the resules are supported to the algebraical superposition technic. In using above algebraical superposition technic to analysis airspace dispersive propagation poperties, i.e., to find out its time-domain parameters, the resultant formula contain time-domain factor and frequency-domain factor, that is first time to present in the paper, so it is called 'time-frequency union technic'. In the paper simultaneity solve out wave number and wave impendance for waveguide TE10 mode propagation, and get both time-frequency union values, and show the soving process and soving accuracy.

Keywords: Frequency Domain-time Domain Transformation, Inverse Laplace Transformation, Lgebraical Superposition Technic, Rectangalar Waveghide TE10 Mode, Time-frequency Union Value

频域—时域变换的代数叠加技术

高本庆

北京理工大学信息科学与电子学院, 北京, 中国

邮箱

gaobq@bit.edu.cn

摘要: 提出用于频域—时域变换的代数叠加技术。其原理模型的建立过程: 由拉普拉斯逆变换式出发, 将逆变换积分式用其等效的 k $[-K, K]$ 项级数式表示, 根据积分函数沿积分路径的分布特性, 关于 k $[-K, K]$ 的双向级数和可表示为 k $[0, K]$ 的单向三角函数型的级数和。本文展示其实施过程, 给出应用例子, 结果支持了原理技术。进一步, 用代数叠加技术分析研究了在有限频域上实现频域—时域变换的技术, 在求取直角波导TE10 模时域参数时, 发现其时域解为时域因子和频域因子的乘积, 这特种类型时域解首次出自本文, 被命名: ‘时频统合解’或‘时频统合值’。本文求解了直角波导TE10 模波数和波阻抗, 得到二参数的‘时频统合值’, 展示其求解过程和计算精度。

关键词: 频域—时域变换, 拉普拉斯逆变换, 代数叠加技术, 直角波导TE10模, 时频统合值

1. 引言

在电学、力学、控制论等科学领域与工程技术中，往往需要观察和研究一个系统的各种随时间变化的参量，同样也关心一个系统随频率变化的参量，前者称作时域参量，后者称作频域参量。频域和时域参量，可以用现有的理论和技术知其一而得到另一。常用的时域-频域的变换方法是福里叶变换法和拉普拉斯变换法，后者对使用条件要求较宽松，其应用范围要广泛些。有关介绍拉普拉斯变换原理、应用及拉普拉斯变换函数表的专著和教材[1-3]，很易在各国大学图书馆内见到。

实现原函数（时域）到象函数（频域）间的拉普拉斯变换，本文提出一种用于频域—时域变换的代数叠加技术，它由拉普拉斯逆变换式出发，经复平面变换后，可将逆变换积分式用其等效的 $k[-K, K]$ 项级数式表示，当变换函数关于 $\pm k$ 项级数的幅度和相位值分别对 $k=0$ 呈偶对称和奇对称分布时，可将双向级数和表示为 $k[0, K]$ 的单向三角函数型的级数和。该三角函数诸元是由变换函数和积分变换式中的指数函数项元素组成的，易于计算和叠加。本文给出实施代数叠加技术的要点和过程。为了检验和证实本文技术的有效性，本文给出算例。算例的结果支持了本文原理技术的有效性。

本文进一步以色散空域（矩形波导传播电磁波TE10模的电磁参量变换（由频域向时域变换））问题为对象，开展了探索性的研究，其主要过程是：由拉普拉斯逆变换式出发，将逆变换积分式用其等效的 $[1, K]$ 项级数式表示，经推演发现：其结果时域序列式是由二个基本元素组成，其一是时间因子，另一是频率因子。这个结果在拉普拉斯逆变换中，是鲜为所知的。故本文将之称为‘时频统合值’的新概念和方法。本文计算了直角波导TE10模的传播波数和波阻抗变换，计算结果证明其合理性。

本文内容安排：第一部分，引言；第二部分，一般问题；第三部分，色散空域；第四部分，结论。

2. 一般问题

2.1. 计算模型

今由拉普拉斯变换式出发，研究建立计算模型的过程如下：

首先，由拉普拉斯逆变换式：

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds \quad s = \sigma + j\omega \quad \omega = 2\pi f \quad (1)$$

其相对应的拉普拉斯变换式是

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (2)$$

上时域序列式(1)可用其等效的级数和式表示如下：

$$f(t_i) = \Delta f \sum_{k=-K}^K F(s)e^{st_i} \quad k = -K, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, K \quad (3)$$

进一步，可将(2)式中 $F(s)$ 用其幅度和相位值表示($F_m(k)e^{j\phi_k}$)，其 e^{st_i} 项亦用其实部和虚部值($e^{\sigma t_i} e^{j\omega_k t_i}$)表示。并将 $k[-K, K]$ 分离成 $[-K, -1], 0, [1, K]$ 三部分，则得：

$$\begin{aligned} f(t_i) &= \Delta f \left\{ F_m(0)e^{j\phi_0} e^{\sigma t_i} + \left[\sum_{k=-K}^{-1} + \sum_{k=1}^K \right] F_m(k)e^{\sigma t_i} e^{j\omega_k t_i} e^{j\phi_k} \right\} \\ &= \Delta f e^{\sigma t_i} \left\{ F_m(0)e^{j\phi_0} + \left[\sum_{k=-K}^{-1} + \sum_{k=1}^K \right] F_m(k)e^{j(\omega_k t_i + \phi_k)} \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

最后，当频域函数 $F(s)$ 对关于 k 的分布特征是： $F_m(k) = F_m(-k)$ 、 $\phi_m(k) = -\phi_m(-k)$ 。即 $F(s_1)$ 的幅值对 $k=0$ 呈偶对称分布，其相角对 $k=0$ 呈奇对称分布时，应用欧拉公式 $e^{j\varphi} + e^{-j\varphi} = 2\cos\varphi$ ，我们得到：

$$\begin{aligned} f(t_i) &= \Delta f e^{\sigma t_i} \left\{ F_m(0)e^{j\phi_0} + 2 \sum_{k=1}^K F_m(k) \cos(\omega_k t_i + \phi_k) \right\} \\ i &= 0, 1, 2, \dots, N_t \end{aligned} \quad (5)$$

式(5)即是待求的结果。

2.2. 实施要点

由式(5)可求得待求时域序列，其实施计算的要点是

(a) 频域函数特征分析：在给定的频域范围和采样间隔(Δf)时，计算出 $F_m(k), F_m(-k)$ 和 $\phi_m(k), \phi_m(-k)$ ，以判定其是否满足偶对称和奇对称分布($F_m(k) = F_m(-k)$ 、 $\phi_m(k) = -\phi_m(-k)$)。如满足，则可由式(5)计算出待求的时域序列。

(b) 频域、时域的采样间隔和计算区域等的确定：若时域的采样间隔和采样点数分别用 Δt 、 N_t 表示，则总时间长度 $t_s = N_t \Delta t$ ；用 Δf 、 N_f 表示频域的采样间隔和采样点数， f_h 表示最高工作频率， f_s 表示采样频率；则频域、时域参数间有下列众所周知的关系式：

$$\Delta f = \frac{1}{t_s} = \frac{f_s}{N_f} ; \quad f_s = (3-6)f_h = \frac{1}{\Delta t} ; \quad \Delta t \leq \frac{1}{2f_h} \quad (6)$$

(c) 时域序列计算要点：当由(5)式计算时，主要是在 s 面上沿平行于虚轴、距离虚轴为 σ 的上半轴线上进行的。将该半轴线按 Δf 长度等分，得 K 个 Δf 长度。理论上 K 向无限大逼近，但实际计算时，可按如下方法确定。即先给定 K_i ，由式(5)计算出一组时域序列，再给定另一 K_{i+1} 得出又一组时域序列。比较该两组时域序列值，当两组数值有两位或多于两位是相等时，则可近似认为 K_{i+1} 组时域序列是待求序列的‘收敛值’。

(d) 为了求得时域序列的‘收敛值’，通常需有百千次甚至上万次的代数计算和叠加，为了确保所得‘收敛值’的精度，建议采用双精度计算。

(e) 所得的时域解(时域序列)通常是需要检验的。检验的方法是: 将所得的时域序列通过拉普拉斯变换, 得到其频域序列(称作计算值)。由已知的频域函数 $F(s)$ 计算得到其频域序列(称作理论值)。将计算值与理论值对比, 可得出结论。

2.3. 应用举例

这里将给出二个算例, 实施频域—时域变换时, 全部遵循以上的‘实施要点’, 对于各例的‘个性’, 将简言示出。

例1

$$F(s) = \frac{\sqrt{s^2 + 6s + 7}}{(s+1)(s+4)}, \quad s = \sigma + j\omega, \quad \omega = 2\pi f \quad (7)$$

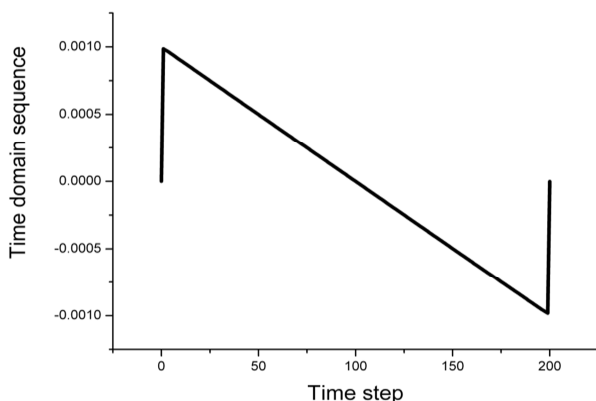
对于本例 $F(s)$ 已不能用查表和经典法求解, 但可用本文式(5)求得其时域序列。其过程是: 先选择 σ 和确定用于频域和时域序列计算的参数, 它们分别是: $\sigma = -2.5$; $\Delta f = 500\text{Hz}$, $f_h = 3 \times 10^4 \text{Hz}$; $\Delta t = 1 \times 10^{-5} \text{s}$, $Nt = 200$ 。

首先, 由 $F(s)$ 计算出 $F_m(k), F_m(-k)$ 、和 $\phi_m(k), \phi_m(-k)$, 以判定其是否满足偶对称和奇对称分布 ($F_m(k) = F_m(-k)$ 、 $\phi_m(k) = -\phi_m(-k)$)。经计算知其满足偶对称和奇对称分布, 这个频域序列 ($k = 0, 1, 2, \dots, N_t$) 即是本例的‘理论值’。

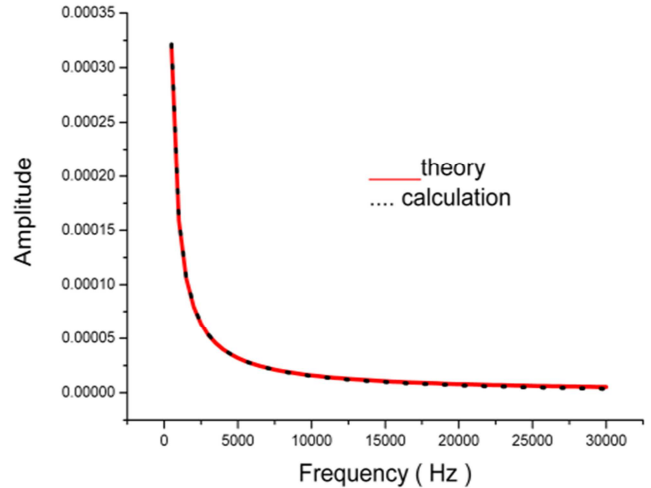
其次, 可由式(5)计算出待求的时域序列。计算时, 逐渐增加 K 值, 以企获取时域序列的‘收敛值’。对于本例 $K = 5000$ 时的时域序列可认为是收敛值(它与 $K = 4000$ 的时域序列仅在个别时间点上有所不同, 其余时间点有三位以上相同), 见图1(a)。

最后, 分析计算所得时域序列‘收敛值’的频谱, 所得频域序列即是‘计算值’。

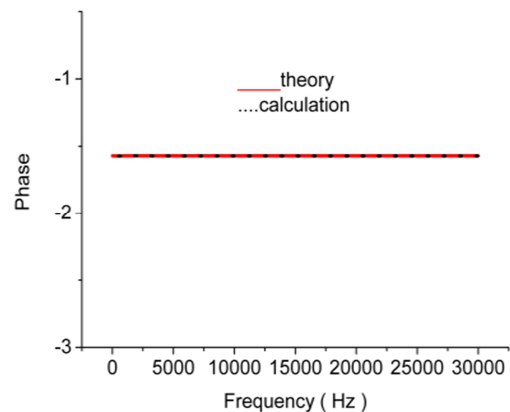
计算值与理论值 $F(s)$ 的比较见图1(b)和(c)。两图分别是计算值与理论值的幅值和相角(弧度值)随频率的变化曲线, 其中红实线是理论值、黑点线是计算值。两者在 $f = 500 \rightarrow 15000\text{Hz}$ 吻合好(有两位数值同), 在 $f = 15000 \rightarrow 30000\text{Hz}$ 两者幅值仍相近。两者的相角(弧度)在 $f = 500 \rightarrow 30000\text{Hz}$ 均吻合好(有三位数值(-1.57)同)。



(a)



(b)



(c)

图1 例1求得的时域序列(图a), 和它的频谱的幅值、相角与其对应理论值的比较(图b、图c)。

例2

$$F(s) = \frac{1}{\sqrt{s^5 + 4s^4 + 8s^3 + 8s^2 + 7s + 4}}, \quad s = \sigma + j\omega, \quad \omega = 2\pi f \quad (8)$$

这是一个无理和有理函数混合的分式, 其分母是五次多项式的无理函数与二次多项式的和, 难于用经典方法求其时域解。用式(5)求其时域解序列时, 其计算参数分别是: $\sigma = -2.0$; $\Delta f = 0.1\text{Hz}$, $f_h = 6\text{Hz}$; $\Delta t = 5 \times 10^{-2} \text{s}$, $Nt = 200$ 。经对 $F(s)$ 计算知满足偶对称和奇对称分布 ($F_m(k) = F_m(-k)$ 、 $\phi_m(k) = -\phi_m(-k)$)。这个频域序列 ($k = 0, 1, 2, \dots, N_t$) 即是本例的‘理论值’。实施时域解序列计算时, 取 $K = 2000$ 时其时域序列即达收敛值(与 $K = 1500$ 的值有两位以上数值同)。同时由时域解序列求出其频谱序列(计算值)。理论值与计算值间的比较示于图2, 其上红实线是理论值、黑点线是计算值; 图(a)是两者幅值, 图(b)是两者相角值, 两者幅值、相角值在 $f = 0.1 \rightarrow 6.0\text{Hz}$ 上均吻合好。需指出, 两者相角值均在 $f = 1.4\text{Hz}$ 、 1.5Hz 点处出现跃变, 由3.1突降至+3.1。

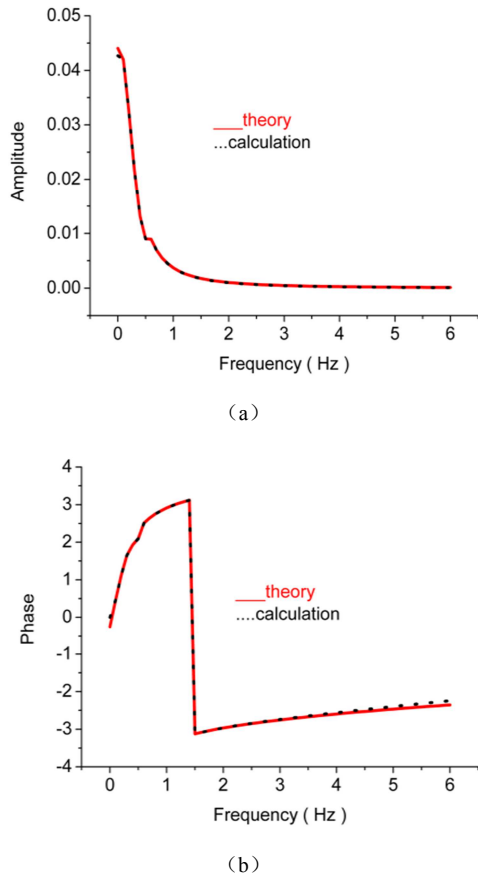


图2 理论值与计算值间的比较：幅值（图a），相角（图b）。

3. 色散空域

3.1. 模型

研究在有限频域上如何建立其所对应的时域序列计算模型的一个实例。该频域模型实例是：具有空域色散特性的矩形波导。已知[5]：工作于TE₁₀(H₁₀)模X波段矩形波导的尺寸 $a=0.02286\text{m}$ ， $b=0.01016\text{m}$ 。其有效工作频域是： $f=0.6633\sim 1.3204\times 10^{10}\text{Hz}$ 。其主要有色散特性的频域参数是TE₁₀波型的传播波数 Γ_{10} 。

$$\Gamma_{10} = j\beta_{10}, \quad \beta_{10}^2 = k_0^2 - k_{c,10}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2},$$

$$\beta_{10}(s) = F(s) = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}}, \quad s = j\omega, \quad \omega = 2\pi f \quad (9)$$

由上频域参数求对应的时域序列，可由如下拉普拉斯逆变换式求出：

$$\beta_{10}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_0^{\infty} \beta_{10}(s) e^{st} ds = \frac{1}{2\pi j} \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}} e^{j\omega t} j2\pi df$$

$$= \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}} e^{j\omega t} df$$

上式 $s = j\omega, \sigma = 0$ 。是因波导空间通常是空气。将 $\beta_{10}(t)$ 积分式写为级数和式，并计及工作频域范围，该和式如下：

$$\beta_{10}(i) = \sum_{k=1}^K \sqrt{\frac{\omega_k^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}} \exp(j\omega_k t_i) \Delta f \quad i = 0, 1, 2, \dots, N_t \quad (10)$$

上式，当 $\Delta f = 0.7143 \times 10^8 \text{Hz}$ 时，其叠加项总数 $K=92$ ，即工作频域序列项数 $k=1-92$ 。上式主因子是： $\sqrt{\frac{\omega_k^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}}$ ， $\exp(j\omega_k t)$ 。其后项因子是 $\omega_k t$ 函数，但前项因子仅是对 ω_k 函数，可用 $\beta_{10}(f_k)$ 表示：

$$\beta_{10}(f_k) = \sum_1^k \sqrt{\frac{\omega_k^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}} \Delta f \quad (11)$$

因此式(10)变为：

$$\beta_{10}(i) = \beta_{10}(f_k) \exp(j\omega_k t_i) \quad i = 0, 1, 2, \dots, N_t \quad (12)$$

(12)式中 $\beta_{10}(f_k)$ 值可由式(11)求出，是随 k 变化的多元频域序列。该频域序列可预先求出，以備由(11)式计算时域序列时调用。

3.2. 计算式要点

对所得(11)，(12)式的分析：

(a) 所得计算时域序列(12)式包括两项：其第一项(11)式，是TE₁₀波型的传播波数的频域分布函数，即是本次分析的理论值。其第二项 $\exp(j\omega_k t)$ 才是其时域序列项

(b) 由(12)式的第二项可计算其时域序列。分析计算表明：其频谱序列峰值位于 $\omega_k(f_k)$ 处，在离开 f_k 数个 Δf 的频桌上，其频谱序列值近似等于常数。

(c) 矩形波导TE₁₀模波数的频谱计算值：等于(12)式第二项的频谱计算值与(12)式第一项相应频谱值(TE₁₀模波数的频谱理论值)的乘积。因此，可将(12)式第二项的时间序列的频谱计算值，看成是各计算频桌上计算值与理论值的偏离系数。实际计算表明：这个偏离系数在离开 f_k 数个 Δf 的频桌上近似等于1。

(d) 基于本次分析所得时域序列式(12)中同时出现频域因子和时域因子，这个结果在一般拉普拉斯逆变换中，是见不到的。故本文将这里分析技术称作时频统合技术的新概念和方法。计算结果(见3.3)证明其合理性。

3.3. 计算结果

本次先在所研究工作频域的中心频桌($f=9.84778 \times 10^{10} \text{Hz}$)上进行了计算。其计算参数分别是： $\Delta t = 0.14 \times 10^{-10}$ ， $N_t = 1000$ ； $\Delta f = 0.7143 \times 10^8$ ， $N_f = 92$ 。其结果：在中心频桌上，其频谱序列峰值是1001。

離中心頻桌約5頻桌外的各頻桌上其頻譜序列模值近似等于1。

为了在工作频带中不出现峰值1001, 将其 k 取值高于工作频域上限值, 即令 $f_k = f_{107} = 1.4205e10$ Hz。所得结果见图3。由图看出, 在有效工作频域 $f=0.6633\sim 1.3204 \times 10^{10} H_z$ 上, 其頻譜序列值变化态势: 其复数值序列模值在1.019~1.022间变化。即计算模值与理论值模值的偏差小于2.5%。

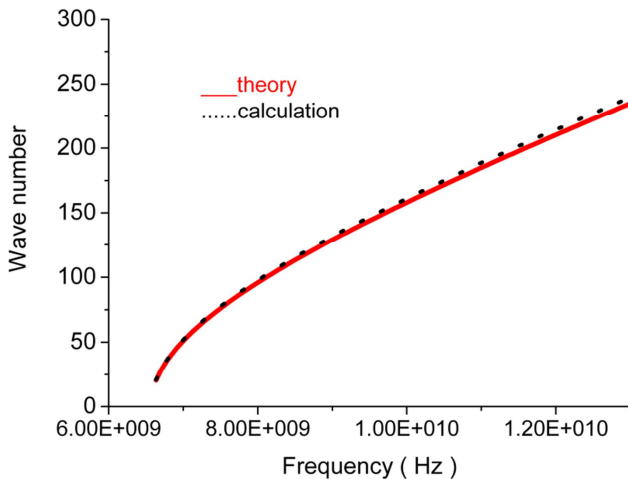


图3 矩形波導TE10模波数理论值与计算值间的比较。

3.4. 矩形波導TE10模波阻抗的分析计算

X波段矩形波導 TE10模頻域波阻抗式[3]如下:

$$Zh_{10}(f) = \frac{k_0}{\beta_{10}(f)} z_0 = \frac{k_0}{\beta_{10}(f)} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \frac{\omega \mu_0}{\beta_{10}(f)} \quad (13)$$

上式 $\beta_{10}(f)$ 是TE10模頻域波数。经与上段求取TE10波型的传播波数相同过程, 可得时域波阻抗序列式:

$$Zh_{10}(i) = Zh_{10}(f_k) \exp(j\omega_k t_i) \quad i = 0, 1, 2, \dots, N_t \quad (14)$$

$$Zh_{10}(f_k) = \sum_{k=1}^k \frac{\omega \mu_0}{\beta_{10}} \Delta f \quad (15)$$

式(15)是随 k 变化的多元頻域序列。

与求取TE10波型的传播波数过程相同, 这个求解过程亦称作时頻统合技术。

在具体由(14)(15)式求取时域波阻抗序列时, 所用参数均与上计算时域传播波数时相同。所得数据示于图4。由图看出, 在頻域 $f=0.6633\sim 1.3204 \times 10^{10} H_z$ 上, 其复数值序列模值在1.019~1.022间变化。即计算与理论值模值的偏差小于2.5%。

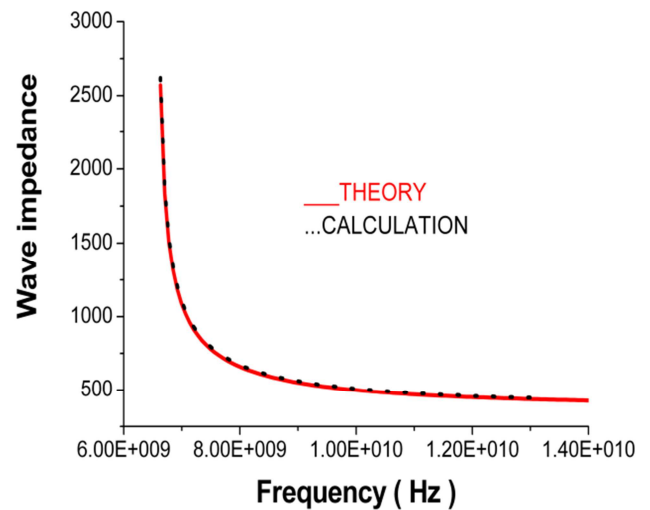


图4 矩形波導TE10模波阻理论值与计算值间的比较。

4. 结论

(1) 本文提出的代数叠加技术具有简单易于计算的优点适用于多种有理函数和无理函数的变换。

(2) 在将代数叠加技术用于研究色散空域问题, 即是工作于x波段TE10模的頻域参数的变换时, 所得到的时域解是时域因子和頻域因子的乘积。这特种型式的解, 是首次出现于本文, 被称为‘时頻统合解’或‘时頻统合值’。

(3) 得出‘时頻统合解’是本文的亮点。

感谢

本文工作是在电磁兼容与微波系统实验室完成的, 衷心感谢李伟明、任武、薛正辉教授长期给与的支持。

参考资料

- [1] 郑君里等, 信号与系统引论。北京: 高等教育出版社, 2009, p420-438。
- [2] 吴湘淇, 信号与系统(第3版)。北京: 电子工业出版社, 2009, p338。
- [3] 曾禹村等, 信号与系统(第3版)。北京: 北京理工大学出版社, 2010, p266-283。
- [4] (美) R.E.柯林 著, 侯元庆译, 导波场论。上海科学技术出版社, 1960, p182-184。
- [5] 吕善伟; 微波工程基础。北京航空航天大学出版社, 1996, p128-139。
- [6] 阎润卿, 李英惠, 微波技术基础。北京: 北京理工大学出版社, 1997, p78-96。
- [7] 梁昆淼, 数学物理方程。北京: 人民教育出版社, 1978, p.85-99。

- [8] 复旦大学数学系编, 数学物理方程(第2版)。上海: 上海科学技术出版社, 1961, p78-94。
- [9] 数学手册编辑组, 数学手册。北京: 人民教育出版社, 1979, p.553-565。
- [10] 彭国伦, Fortran95程序设计。北京: 中国电力出版社, 2006, p.562-567。
- [11] Ben-Qing Gao, An algebraical superposition technic for transformation from Z domain to time domain, 2018, WJRR, Vol.6, May, P.4-7。
- [12] Ben-Qing Gao, A new principle technic for the transformation from frequency to time domain, 2017, AIP Advances 7, 035315, USA。